Matematika 2 – java e nëntë

Seminaret

1. Vërtetoni që në qoftë se numrat natyrorë a dhe b janë reciprokisht të thjeshtë atëherë numrat $11a + 2b$ dhe $18a + 5b$ ose janë reciprokisht të thjeshtë ose $PMP(11a + 2b, 18a + 5b) = 19$.

2. Vërtetoni që për numrat e çfarëdoshëm natyrorë a dhe b vlen barazimi:

$$PMP(5a + 3b, 13a + 8b) = PMP(a, b)$$

3. Le të jetë $n \in \mathbb{N}$. Të gjendet $SHVP(n(n + 1)(n + 2))$.

4. Vërtetoni që për numrat natyrorë a dhe b vlen barazimi $PMP(a+b, SHVP(a, b)) = PMP(a, b)$.

5. Të gjendet numri më i vogël natyror n, i cili jep mbetjen 1 pas pjestimit me secilin nga numrat $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ dhe 10.

6. Të gjendet numri më i vogël natyror n, i cili plotpjestohet nga numri 7 dhe jep mbetjen 1 pas pjestimit me secilin nga numrat $2, 3, 4, 5$ dhe 6.

7. Duke përdorur algoritmin e Euklidit për gjetjen e PMP të dy numrave, të gjenden:

(a) $PMP(187321, 165148)$

(b) $PMP(32925409, 12258585)$

(c) $PMP(n^2 + 1, n + 1)$, ku $n \in \mathbb{N}$ dhe $n > 2$.

Zgjidhjet

1. Le të jetë numri d një pjestues i përbashkët i numrave $11a + 2b$ dhe $18a + 5b$. Atëherë numri d plotpjeston edhe numrin $11 \cdot (18a + 5b) - 18 \cdot (11a + 2b) = 55b - 36b = 19b$. Po kështu numri d plotpjeston edhe numrin $5 \cdot (11a + 2b) - 2 \cdot (18a + 5b) = 55a - 36a = 19a$. Pra $19a|d$ dhe $19b|d$. M.q.s a dhe b nuk kanë faktorë të përbashkët kemi që $d = 1$ ose $d = 19$.

Në rastin kur $d = 19$ do kemi $PMP(11a + 2b, 18a + 5b) = 19$ (kjo është edhe e mundur p.sh. për $a = 1$ dhe $b = 4$). Në rastin tjetër (pra kur numri 19 nuk është pjestues i përbashkët i numrave $11a + 2b$ dhe $18a + 5b$) kemi $PMP(11a + 2b, 18a + 5b) = 1$ që do të thotë se numrat $11a + 2b$ dhe $18a + 5b$ janë reciprokisht të thjeshtë.

2. Shënojmë me d_1 një numër që plotpjeston numrat $5a+3b$ dhe $13a+8b$ dhe me d_2 një numër që plotpjeston numrat a dhe b. Atëhere numri d_1 plotpjeston numrin $5\cdot(13a+8b)-13\cdot(5a+3b) = 40b-39b = b$ dhe po ashtu d_1 plotpjeston numrin $8\cdot(5a+3b)-3\cdot(13a+8b) = 40a-39a = a$. Pra d_1 plotpjeston numrat a dhe b, nga ku rrjedh që $d_1 \leqslant PMP(a,b)$. Duke marrë $d_1 = PMP(5a+3b, 13a+8b)$, kemi që $PMP(5a+3b, 13a+8b) \leqslant PMP(a,b)$.

Nga ana tjetër numri d_2 plotpjeston edhe numrat $5a+3b$ dhe $13a+8b$, meqenëse d_2 plotpjeston numrat a dhe b. Nga këtu kemi që $d_2 \leqslant PMP(5a+3b, 13a+8b)$. Duke marrë $d_2 = PMP(a,b)$, kemi që $PMP(a,b) \leqslant PMP(5a+3b, 13a+8b)$

Mosbarazimet e vërtetuara $PMP(5a+3b, 13a+8b) \leqslant PMP(a,b)$ dhe $PMP(a,b) \leqslant PMP(5a+3b, 13a+8b)$ implikojnë $PMP(a,b) = PMP(5a+3b, 13a+8b)$.

3. Le të jenë $n = {p_1}^{\alpha_1}\cdots{p_k}^{\alpha_k}$, $n+1 = {q_1}^{\beta_1}\cdots{q_l}^{\beta_l}$ dhe $n+2 = {r_1}^{\gamma_1}\cdots{r_s}^{\gamma_s}$ paraqitjet kanonike të numrave $n, n+1$ dhe $n+2$, si prodhim faktorësh të thjeshtë. Në qoftë se numri n është tek atëhere bashkësitë $\{p_1,\cdots,p_k\}$, $\{q_1,\cdots,q_l\}$ dhe $\{r_1,\cdots,r_s\}$ janë disjunktive , kështu që:

$$SHVP(n(n+1)(n+2)) = {p_1}^{\alpha_1}\cdots{p_k}^{\alpha_k}\cdot{q_1}^{\beta_1}\cdots{q_l}^{\beta_l}\cdot{r_1}^{\gamma_1}\cdots{r_s}^{\gamma_s} = n(n+1)(n+2)$$

Në rastin kur numri n është çift, atëherë numrat n dhe $n+2$ kanë faktor të përbashkët të thjeshtë numrin 2. Të gjithë faktorët e tjerë të thjeshtë që figurojnë tek numrat $n, n+1$ dhe $n+2$ janë të ndryshëm mes tyre. Në qoftë se tek numri n faktori ka formën 2^k atëherë tek numri $n+2$ faktori 2 ka formën 2^1. Po kështu në qoftë se tek numri $n+2$ faktori ka formën 2^k atëherë tek numri n faktori 2 ka formën 2^1. Kjo sepse numrat n dhe $n+2$ janë dy numra çift të njëpasnjëshëm, pra kanë paraqitjet $4k+2$ dhe $4k$ që do të thotë se numri i formës $4k+2$ përmban 2^1 në paraqitjen e tij kanonike si prodhim numrash të thjeshtë. Kështu kemi:

$$SHVP(n(n+1)(n+2)) = 2^{max(1,k)}\cdots{p_k}^{\alpha_k}\cdots{q_l}^{\beta_l}\cdots{r_s}^{\gamma_s} = \frac{2^{k+1}\cdots{p_k}^{\alpha_k}\cdots{q_l}^{\beta_l}\cdots{r_s}^{\gamma_s}}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}$$

4. Shënojmë me $d = PMP(a,b)$. Do kemi $a = ud$, $b = vd$, ku $PMP(u,v) = 1$. Gjithashtu kemi $SHVP(a,b) = uvd$. Nga këtu rrjedh që:

$$PMP(a+b, SHVP(a,b)) = PMP((u+v)d, uvd) = PMP(u+v, uv)\cdot d = 1\cdot d = d = PMP(a,b)$$

Shënim: Më përpara kemi vërtetuar që kur $PMP(u,v) = 1$ atëherë $PMP(u+v, uv) = 1$.

5. Nga të dhënat kemi që numri $n-1$ plotpjestohet nga numrat $2,3,4,5,6,7,8,9,10$ dhe n është minimal i tillë. Pra do kemi $n-1 = SHVP(2,3,4,5,6,7,8,9,10)$. Duke patur parasysh që $2 = 2^1, 3 = 3^1, 4 = 2^2, 5 = 5^1, 6 = 2^1\cdot3^1, 7 = 7^1, 8 = 2^3, 9 = 3^2$ dhe $10 = 2^1\cdot5^1$ do kemi $SHVP(2,3,4,5,6,7,8,9,10) = 2^3\cdot3^2\cdot5^1\cdot7^1 = 8\cdot9\cdot5\cdot7 = 2520$. Nga këtu kemi $n = 2521$.

6. Numri n duhet të jetë i formës $7k$ për ndonjë $k \in \mathbb{N}$ dhe $n-1$ duhet të plotpjestohet nga numrat $2,3,4,5$ dhe 6 ku n është minimal i tillë. Kështu do kemi $7k-1 \in \{SHVP(2,3,4,5,6)\cdot l | l \in \mathbb{N}\}$.
$2 = 2^1, 3 = 3^1, 4 = 2^2, 5 = 5^1, 6 = 2^1\cdot3^1$ implikojnë që $SHVP(2,3,4,5,6) = 2^2\cdot3^1\cdot5^1 = 4\cdot3\cdot5 = 60$.
Mbetet që të gjendet numri minimal natyror k ashtu që $7k-1$ të jetë i formës $60\cdot l$, ku $l \in \mathbb{N}$.
Për $l = 1, l = 2, l = 3$ dhe $l = 4$ kjo është e pamundur. Mbetet $l = 5$, ku kemi $7k-1 = 300 \Leftrightarrow k = 43$.
Pra, numri i kërkuar n është i barabartë me 301.

7.

(a)
$$
\begin{aligned}
187321 &= 1 \cdot 165148 + 22173\\
165148 &= 7 \cdot 22173 + 9937\\
22173 &= 2 \cdot 9937 + 2299\\
9937 &= 4 \cdot 2299 + 741\\
2299 &= 3 \cdot 741 + 76\\
741 &= 9 \cdot 76 + 57\\
76 &= 1 \cdot 57 + 19\\
57 &= 3 \cdot 19 + 0
\end{aligned}
$$

Nga këtu kemi $PMP(187321, 165148) = 19$.

(b)
$$
\begin{aligned}
32925409 &= 2 \cdot 12258585 + 8408239\\
12258585 &= 1 \cdot 8408239 + 3850346\\
8408239 &= 2 \cdot 3850346 + 707547\\
3850346 &= 5 \cdot 707547 + 312611\\
707547 &= 2 \cdot 312611 + 82325\\
312611 &= 3 \cdot 82325 + 65636\\
82325 &= 1 \cdot 65636 + 16689\\
65636 &= 3 \cdot 16689 + 15569\\
16689 &= 1 \cdot 15569 + 1120\\
15569 &= 13 \cdot 1120 + 1009\\
1120 &= 1 \cdot 1009 + 111\\
1009 &= 9 \cdot 111 + 10\\
111 &= 11 \cdot 10 + 1\\
10 &= 10 \cdot 1 + 0
\end{aligned}
$$

Nga këtu kemi $PMP(32925409, 12258585) = 1$.

(c) Në qoftë se numri n është tek atëherë kemi:

$$
\begin{aligned}
n^2 + 1 &= (n-1)(n+1) + 2\\
n - 1 &= (\tfrac{n-1}{2}) \cdot 2 + 0
\end{aligned}
$$

Nga këtu kemi $PMP(n^2 + 1, n + 1) = 2$.

Në qoftë se numri n është çift atëherë kemi:

$$
\begin{aligned}
n^2 + 1 &= (n-1)(n+1) + 2\\
n - 1 &= (\tfrac{n-2}{2}) \cdot 2 + 1\\
\tfrac{n-2}{2} &= 1 \cdot (\tfrac{n-2}{2}) + 0
\end{aligned}
$$

Nga këtu kemi $PMP(n^2 + 1, n + 1) = 1$.